Operaden und Vertexalgebren

von Martin Schlichenmaier[1]

Vortrag in der Arbeitsgemeinschaft Mannheim - Heidelberg 1997

Ich möchte und ich kann in diesem Überblicksvortrag lediglich eine sehr grobe Skizze einer geometrsichen Interpretation von Vertexalgebren geben. In dieser Interpretation werden Vertexalgebren (genauer gesagt gewisse Klassen von konformen Vertexalgebren) als "Darstellungen einer geeigneten geometrischen Operade" aufgefaßt. Diese Interpretation stammt von Yi-Zhi Huang und James Lepowsky [Hu1], [Hu2], [Hu3], [HuLe1], [HuLe2]. Alles was ich hier erzähle geht auf die obige Literatur und [Kim] zurück.

Erwähne möchte ich noch, daß es eine weitere und ganz neue Interpretation durch Beilinson und Drinfeld gibt [BeDr], [HuLe3], die $\mathcal{D}$-module und chirale Algebren (=Vertexalgebren) verbindet. Darauf kann ich in diesem Vortrag allerdings nicht eingehen.

I. Was ist eine Operade

Den Begriff der Operade kann man als Erweiterung des Begriffs der Halbgruppe auffassen. Das klingt sehr formal algebraisch und auf jeden Fall nicht netter als der Begriff der Vertexalgebra. Wir werden aber sofort sehen, daß einige wichtige Operaden, mit denen wir es hier zu tun haben, geometrischer Natur sind. Bevor ich den Begriff exakt definiere sei er an einem Standardbeispiel erläutert.

[1]Universität Mannheim, Fakultät für Mathematik und Informatik, 68131 Mannheim, Germany, schlichenmaier@math.uni-mannheim.de

Die Endomorphismenoperade. Sei V ein Vektorraum. Die *Endomorphismenoperade* End_V ist als Menge gegeben durch

$$End_V = \{End_V(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad End_V(n) := \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)\ .$$

Auf jedem $End_V(n)$ operiert die symmetrische Gruppe S_n durch Vertauschung der Faktoren im Tensorprodukt. Für $f \in End_V(n)$ und $g \in End_V(m)$ sind Verknüpfungen $f \circ_i g \in End_V(n+m-1)$ für $i = 1, \dots, n$ definiert duch das Einsetzen von g an der i-ten Position von f:

$$f \circ_i g\ (v_1, v_2, \dots, v_{n+m-1}) := f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, g(v_i, \dots, v_{i+m-1}), v_{i+m}, \dots, v_{n+m-1})\ .$$

Wir haben die folgenden Assoziativitätsrelationen: Seien $f_1 \in End_V(n_1)$, $f_2 \in End_V(n_2), f_3 \in End_V(n_3)$, so ergeben die Verknüpfungen Elemente aus $End_V(n_1+n_2+n_3-2)$. Alle Möglichkeiten ein entsprechendes Element zu erhalten, sollen dasselbe liefern. Es handelt sich entweder um

$$f_1(...., f_2(..), ..., f_3(..), ..), \quad \text{oder um} \quad f_1(..., f_2(.., f_3(...), ...), ..)\ .$$

Das Resultat soll nicht von der Reihenfolge der Einsetzungen abhängen. Dies ist bei diesem Beispiel natürlich der Fall.
Setzen wir $I := id_V \in End_V(1)$, so erhalten wir, daß sich I wie ein Einselement in der Verknüpfung verhält.
Offensichtlich ist $End_V(1)$ eine assoziative Algebra mit Eins.

Definition. Eine Operade $C = \{C(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (mit Einheit) ist eine Familie von Objekten (Mengen, topologische Räume, Vektorräume, komplexe Räume, etc.) derart, daß jedes $C(n)$ eine Aktion der S_n besitzt und eine Familie von Abbildungen

$$\circ_i : C(n) \times C(m) \to C(n+m-1), \quad 1 \le i \le n, \quad (f,g) \mapsto f \circ_i g\ .$$

Es seien die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Für alle $f_1 \in C(n_1), f_2 \in C(n_2), f_3 \in C(n_3)$ mit $n_1 \ge 2$ gilt für $1 \le i < j \le n_1$

$$(f_1 \circ_i f_2) \circ_{j+n_2-1} f_3 = (f_1 \circ_j f_3) \circ_i f_2\ . \tag{1.1}$$

(2) Für alle $f_1 \in C(n_1), f_2 \in C(n_2), f_3 \in C(n_3)$ mit $n_1, n_2 \ge 1$ gilt für $1 \le i, j \le n_1$

$$(f_1 \circ_i f_2) \circ_{i+j-1} f_3 = f_1 \circ_i (f_2 \circ_j f_3)\ . \tag{1.2}$$

(3) Die Verknüpfungsabbildungen sind äquivariant unter den S_n-Aktionen.
(4) Es gibt ein Element $I \in C(1)$, so daß für $f \in C(n)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$I \circ_1 f = f = f \circ_i I \ . \quad \square \tag{1.3}$$

Strengenommen müßte an alle Verknüpfungen noch Indices n und m angehängt werden. Gehören die Objekte einer Operade zu einer gewissen Kategorie und die Verknüpfungsabbildungen zur selben Kategorie, so redet man auch von stetigen, topologischen, linearen, ... Operaden. Hat man eine lineare Operade, dann definiert die Verknüpfung $\circ_1 : C(1) \times C(1) \to C(1)$ auf $C(1)$ die Struktur einer assoziativen Algebra mit 1. Umgekehrt ist jede assoziative Algebra A mit 1 durch $C(1) := A$ und $C(n) := 0$ für $n \neq 1$ eine lineare Operade.

Definition. Sei C eine Operade. Ein Vektorraum V ist eine *Darstellung der Operade* C, auch C-*Algebra* genannt, falls es einen Morphismus von Operaden $m : C \to End_V$ gibt. D.h. es gilt:

(1) m ist eine Abbildung $C(n) \to End_V(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(2) $m(I) = id_V$.
(3) m ist äquivariant unter der S_n-Aktion

$$m(\sigma\Sigma)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = m(\Sigma)(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) \ .$$

(4)

$$m(\Sigma \circ_i \Sigma') = m(\Sigma) \circ_i m(\Sigma') \ . \quad \square$$

II. Beispiele geometrischer Operaden

1. Die *Com* Operade.

Sei S^2 die orientierte Kugel. Sei $Com(n)$ der Modulraum geordneter $n+1$ verschiedener Punkte $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ auf S^2 modulo orientierungserhaltender Diffeomorphismen der S^2. Die symmetrische Gruppe S_n operiere durch Permutation der Punkte $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Es wird eine Familie von Verknüpfungen

$$\circ_i : Com(n) \times Com(m) \to Com(n+m-1), \quad (\Sigma_1, \Sigma_2) \mapsto \Sigma_1 \circ_i \Sigma_2, \qquad 1 \leq i \leq n$$

definiert dadurch, daß man sowohl um den i-ten Punkt von Σ_1 eine Kreisscheibe herausschneidet als auch um den 0-ten Punkt von Σ_2 und dann die Flächen entlang der Ränder verklebt. Das Ergebnis ist wieder diffeomorph zu S^2. Durch $Com = \{Com(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und durch die Verknüpfungen wird eine Operade definiert. Allerdings besteht $Com(n)$ jeweils nur aus einem einzigen Element, da durch Diffeomorphismen alle Punkte untereinander vertauscht werden können. Die symmetrische Gruppe operiert hier trivial. $Com(1)$ besteht nur aus dem Einselement. Das Element aus $Com(0)$ "vernichtet" Punkte. (Man kann es nur von rechts multiplizieren.)

Ist V eine Com-Algebra, d.h. eine Darstellung dieser Operade, so bedeutet dies, daß V eine assoziative, kommutative Algebrenstruktur besitzt.

Nebenbemerkung: Im algebraisch-kategoriellen Zugang zur Feldtheorie sagt man auch, daß eine Com-Algebra eine *zweidimensionale topologische Feldtheorie vom Tree-Level* ist. Tree-Level bedeutet hier, daß durch die Verknüpfungen kein höheres Geschlecht entstehen kann, siehe auch [Kim].

2. Die AS Operade.

Betrachten wir $n+1$ verschiedende Punkte auf der Kreislinie S^1 modulo orientierungserhaltender Diffeomorphismen, so erhalten wir mit den analogen Verklebungsoperationen wie oben wiederum eine Operade AS. Hier gilt allerdings $\#AS(n) = n!$ und die S_n operiert transitiv. Eine AS-algebra besitzt die Struktur einer assoziativen Algebra.

Nebenbemerkung: Eine AS-algebra heißt *eindimensionale topologische Feldtheorie.*

3. Framed little disk operad F.

Statt beliebiger Diffeomorphismen wollen wir jetzt nur noch analytische zulassen. Sei D der abgeschlossene Einheitskreis um $0 \in \mathbb{C}$. $F(n)$ bestehe aus n geordneten Einbettungen $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ von D in D mit

$$f_i(z) = a_i z + z_i, \quad a_i \in \mathbb{C}^*, z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

derart, daß $f_i(D)$ und $f_j(D)$ für $i \neq j$ disjunktes Inneres besitzen. Die Gruppe S_n operiert durch Umordnung der Einbettungen. Es werden Verknüpfungen

$$\circ_i : F(n) \times F(m) \to F(n+m-1), \qquad (\Sigma_1, \Sigma_2) \mapsto \Sigma_1 \circ_i \Sigma_2$$

definiert durch die Vorschrift, daß statt der i-ten Scheibe D in Σ_1 die Scheibe Σ_2 (mit deren Einbettungen) eingebettet wird. $F(n)$ läßt sich explizit als komplexe Mannigfaltigkeit (mit Rändern) mit den Koordinaten $(z_1, a_1, z_2, a_2, \ldots, z_n, a_n)$ aus (2.1) beschreiben. In Formeln läßt sich die Verknüpfung wie folgt angeben. Sei auch ein entsprechendes Element $(z'_1, a'_1, z'_2, a'_2, \ldots, z'_m, a'_m)$ aus $F(m)$ gegeben, so ist das dadurch festgelegte Element aus $F(n+m-1)$ gegeben durch

$$(z_1, a_1, \ldots, z_i, a_i, z_i + a_i z'_1, a_i a'_1, z_i + a_i z'_2, \ldots, a_i a'_m, z_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, , z_n, a_n) \ .$$

Offensichtlich sind die Verknüpfungen komplex-analytisch. Wir erhalten eine Operade F komplexer Mannigfaltigkeiten.

4. Die Operade P.

Sei $P(n)$ der Modulraum $n+1$ geordneter biholomorpher Einbettungen der Kreisscheibe D in $\mathbb{P}^1$, für welche die Bilder disjunktes Inneres haben. Identifiziert werden sie, falls sie durch eine $PGL(2, \mathbb{C})$-Aktion ineinander übergehen. Die S_n operiert durch Permutation auf den letzten n Einbettungen. Durch die PGL-Aktion kann der 0-te Punkt immer nach ∞ gebracht werden. Sei $I \in P(1)$ der $\mathbb{P}^1$ mit den Standardscheiben um ∞ und 0. Die Verknüpfung $\Sigma_1 \circ_i \Sigma_2$ ist gegeben, indem man die i-te Scheibe aus Σ_1 und die Scheibe um ∞ aus Σ_2 herausnimmt und den Rest entlang der Ränder verklebt (siehe den nächsten Abschnitt für mehr Information). Wir erhalten wiederum eine Operade komplexer Mannigfaltigkeiten (unendlichdimensional).

Nebenbemerkung: Eine *zweidimensionale konforme Feldtheorie (vom Tree-Level und mit zentraler Ladung $c = 0$)* ist eine P-algebra V (d.h. eine Darstellung dieser Operade) mit einem topologischen Vektorraum V und stetigen Operadenmorphismus $m : P \to End_V$. Die Abbildung $m : P(n) \to End_V(n)$ heißt *n-Punkt-Korrelationsfunktion.* Ist V speziell ein komplexer Vektorraum und m holomorph, so handelt es sich um eine holomorphe konforme Feldtheorie.

Die Operade F ist eine Unteroperade von P, falls $D \subset \mathbb{P}^1$ aufgefaßt wird als die Einbettung der Standardscheibe. Die Einbettung um ∞ ist gegeben als die Einheitsscheibe in Bezug auf die Koordinate $1/z$. Die Operade P werden wir im nächsten Abschnitt vergrößern zu einer partiellen Operade K.

5. Die Moduloperade.
Sei $M(n) = M_{0,n+1}$ der Modulraum $n+1$ geordneter Punkte auf $\mathbb{P}^1$. Es handelt sich hierbei nicht um eine Operade, da man keine sinnvolle Verknüpfung finden kann. Eine mögliche Abhilfe besteht darin, daß man zusätzlich Koordinatensysteme in die Moduldaten aufnimmt und dann nach gewissen Vorschriften verklebt. Dies wird im nächsten Abschnitt gemacht werden. Geht man allerdings zur Deligne-Mumford-Kompaktifizierung (d.h. zum Modulraum der stabilen $g = 0$ Kurven) über und setzt man $\overline{M}(n) := \overline{M}_{0,n+1}$ für $n \geq 2$, so erhält man eine Verknüpfung $\Sigma_1 \circ_i \Sigma_2$ indem man den i-ten Punkt von Σ_1 mit dem 0-ten Punkt aus Σ_2 identifiziert und dadurch einen weiteren Doppelpunkt erhält. Dies definiert eine Operade (ohne Einselement). Sie wird uns aber hier nicht weiter interessieren.

III. Die partielle Operade der Konfigurationen holomorpher Koordinatensysteme

Sei $K(n)$ der Modulraum von $n+1$ geordneten Punkten auf $\mathbb{P}^1$ mit jeweils lokalen Koordinaten mit diesen Punkten als Zentrum. Zwei Objekte werden identifiziert, falls es einen analytischen Isomorphismus $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gibt, der sowohl die Punkte als auch die Keime der Koordinaten ineinander überführt. Der 0-te Punkt sei negativ orientiert (und kann o.B.d.A. mit ∞ identifiziert werden), die restlichen positiv.

In dieser Situation kann man unter Zusatzvoraussetzungen an die vorliegenden Objekte eine *Vernähungsabbildung* definieren. Seien Σ_1 und Σ_2 solche Objekte. Sei p_i der i-te positiv orientierte Punkt mit Koordinate (U_i, φ_i) auf Σ_1 und sei q_0 der 0-te (negativ orientierte) Punkt mit Koordinate (V_0, ψ_0) auf Σ_2. Wir nehmen an es existiere ein $r > 0$, derart daß gilt[2]

$$\varphi_i(U_i) \supseteq \bar{B}_0^r, \qquad \psi_0(V_0) \supseteq \bar{B}_0^{1/r} \tag{3.1}$$

und daß p_i und q_0 die einzigen markierten Punkte in $\varphi_i^{-1}(\bar{B}_0^r)$ bzw. in $\psi_0^{-1}(\bar{B}_0^{1/r})$ sind. Schneidet man nun die Scheiben $\varphi_i^{-1}(B_0^r)$ aus Σ_1 bzw. $\psi_0^{-1}(\bar{B}_0^{1/r})$ aus Σ_2 heraus und identifiziert man die Ränder beider Flächen durch

$$\varphi_i \circ \gamma \circ \psi_0, \quad \gamma : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \frac{1}{z} \ ,$$

[2] B_0^r bezeichnet die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius r, $\bar{B}_0^r$ die abgeschlossene.

so ergibt dies einen $\mathbb{P}^1$ mit $n+m-1$ Punkten und den unveränderten Koordinatensystemen an den nicht verklebten Punkten. Die S_n operiert durch Vertauschung der Punkte $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (einschließlich der Koordinaten). Die Vernähungsoperation ist nicht immer definiert, da die Bedingung (3.1) nicht immer erfüllt sein muß. Für die definierten Verknüpfungen sind die Axiome einer Operade erfüllt. Es liegt nur eine *partielle Operade* $K = \{K(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ vor. Ich werde sie gleich im Detail studieren. Zuerst sei noch erwähnt, daß K die Operade P als Unteroperade enthält. Sowohl K als auch P sind (partielle) Operaden unendlichdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Die Verknüpfung in K ist die analytische Fortsetzung der Verknüpfung in P. Entsprechend ist auch eine holomorphe K-algebra mit Morphismus $m : K \to End_V$ partieller Operaden eine P-Algebra und definiert deshalb eine holomorphe konforme Feldtheorie mit einer Mehrpunktfunktion, deren analytische Fortsetzung m ergibt.

Die Menge $K(n)$ kann beschrieben werden als

$$K(n) = M^{n-1} \times H \times H_a^m \ . \tag{3.2}$$

Die Bausteine werden im folgenden erklärt. Seien $s_0, s_1, \ldots s_n$ die $n+1$ Punkte, so kann durch analytische Transformationen s_0 auf ∞ und s_n auf 0 (alles in Bezug auf die Standardkoordinate z) gebracht werden. H soll die Koordinatensysteme am Punkt ∞ parametrisieren. Ist $w = \frac{1}{z}$ die Standardkoordinate dort, so kann jedes Koordinatensystem (mit Zentrum ∞) gegeben werden durch eine konvergente Potenzreihe

$$\sum_{i\geq 1} a_i w^i, \quad a_i \in \mathbb{C},\ a_1 \neq 0 \ . \tag{3.3}$$

Für die analytischen Transformationen besitzt man noch einen Freiheitsgrad. Dieser Freiheitsgrad wird benutzt um a_1 auf 1 zu normieren ($z \mapsto z' = \frac{1}{a_1} z$). Die verschiedenen Koordinatensysteme bei ∞ können durch die restlichen Koeffizienten $A = (a_2, a_3, \ldots,)$ gegeben werden. Für das spätere ist es nützlich, eine etwas andere Darstellung der Wahl des Koordinatensystems zu geben. Eine "infinitesimale" Änderung des Koordinatensystems kann durch die Operation eines Vektorfeldes in der lokalen Koordinate x auf die Koordinate x gegeben. In der integrierten Version also

$$\exp\big(\sum_{j\geq 1} A_j x^{j+1} \frac{d}{dx}\big)\, x, \quad A_i \in \mathbb{C} \ . \tag{3.4}$$

Der Raum H besteht aus den Folgen $A = (A_1, A_2, \dots)$, für welche die Potenzreihe (3.4) in einer Umgebung der Null konvergiert.

Durch diese Normierung sind die restlichen Punkte fixiert und können durch die Elemente des Konfigurationsraumes M^{n-1}

$$M^{n-1} := \{(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \mid z_i \neq 0 \ z_i \neq z_j, \text{ für } i \neq j\}$$

gegeben werden. Für die Punkte $z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = 0$ werden die Koordinatensysteme definiert durch die konvergierenden Potenzreihen $\sum_{j \geq 1} a_j^{(i)} (z - z_i)^j$, $a_1^{(i)} \neq 0$, also durch ein Element aus $H_a := \mathbb{C}^* \times H$.

Ein spezielles Element ist $I = (0, (1, 0)) \in K(1)$. Hierbei handelt es sich um den $\mathbb{P}^1$ mit den Punkten $(\infty, 0)$ und den Standardkoordinaten $\omega = \frac{1}{z}$ und z. Ein weiteres Element ist

$$Q_b = (b, 0, (1, 0), (1, 0)) \in K(2) \qquad \text{für} \quad b \in \mathbb{C}, b \neq 0 \ . \tag{3.5}$$

Es sind die Punkte $(\infty, b, 0)$ ausgewählt mit den Standardkoordinaten $\frac{1}{z}$, $(z - b)$ und z.

Es fehlt noch die Definition von $K(0)$. Da hier nur ein Punkt vorliegt, können wir in (3.3) auch a_2 zum Verschwinden bringen.
Somit $K(0) = \{A = (A_1, A_2, \dots) \mid A_1 = 0, \text{ die Potenzreihe in (3.4) konvergiert}\}$.

Ist $Q \in K(n)$, dann gilt mit obigem $I \in K(1)$

$$Q \circ_i I = I \circ_1 Q, \quad 1 \leq i \leq n \ .$$

Wir erhalten eine partielle Operade. Den einzelnen $K(n)$ kann eine topologische Struktur und eine komplex-analytische Struktur (unendlichdimensional) gegeben werden, für welche die Verknüpfungen stetige und komplex-analytische Abbildungen sind. Wir haben also eine Operade mit dieser Zusatzstruktur.

Die Theorie wird leider etwas komplizierter dadurch, daß wir "zentrale Erweiterungen" betrachten müssen.[3] Für kompakte Riemannsche Flächen mit analytisch parametrisierten orientierten Randkomponenten wurde von G.Segal [Seg] eine Theorie des Determinantengeradenbündels entwickelt. Sei Σ eine Riemannsche Fäche mit Rand $\partial\Sigma$. Dann ist

[3] In unserem bisherigen Zugang zu den Vertexalgebren werden diese durch die notwendigen Normalordnungen hervorgerufen.

ein Operator auf den C^∞-Räumen definiert:

$$\bar{\partial} \oplus pr \ : \ \Omega^0(\Sigma) \to \Omega^{0,1}(\Sigma) \oplus \Omega^0_+(\partial\Sigma) \ .$$

Hierbei ist $\bar{\partial}$ der übliche Cauchy-Riemann-Operator und pr ist die Einschränkung der C^∞-Funktion auf den Rand und dann deren Projektion auf den Unterraum der negativen Fouriermoden. Dieser Operator hat endlichdimensionalen Kern und Kokern. Dies erlaubt die folgende Definition

$$\mathrm{Det}_\Sigma := \left(\wedge^{top}(\mathrm{Kern}\,\bar{\partial} \oplus pr)\right)^* \otimes \left(\wedge^{top}(\mathrm{Kokern}\,\bar{\partial} \oplus pr)\right) \ .$$

Näht man zwei Riemannsche Flächen Σ_1 und Σ_2 zusammen, derart daß gewisse Rändern auf Σ_1 mit Ränder auf Σ_2 von der umgekehrten Orientierung identifiziert werden, so erhält man die neue Riemannsche Fläche $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$. Man erhält ebenfalls einen kanonischen Isomorphismus (der natürlich davon abhängt welche Ränder verklebt werden)

$$\ell_{\Sigma_1,\Sigma_2} : \mathrm{Det}_{\Sigma_1} \otimes \mathrm{Det}_{\Sigma_2} \to \mathrm{Det}_{\Sigma_1 \circ \Sigma_2} \, .$$

Zurück zu unserer Situation. Ist $Q \in K(n)$ so kann durch die Parametrisierung an jedem Punkt eine "Kreisscheibe" herausgeschnitten werden. Wird der Radius klein genug gewählt, so erhalten wir eine Riemannsche Fläche mit $n+1$ analytisch parametrisierten Randkurven. Durch eine Standardvorschrift zur Wahl des Radius ist ein Σ_Q ausgezeichnet. Man setzt nun

$$\mathrm{Det}_Q := \mathrm{Det}_{\Sigma_Q} \tag{3.6}$$

und

$$\widetilde{K}(n) = \bigcup_{Q \in K(n)} \mathrm{Det}_Q, \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad \widetilde{K} = \{\widetilde{K}(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0} \ . \tag{3.7}$$

Die Räume $\widetilde{K}(n)$ sind holomorphe Geradenbündel über $K(n)$.

Die Verknüpfung $Q_1 \circ_i Q_2$ definiert einen kanonischen Isomorphismus

$$\ell^i_{Q_1,Q_2} : \mathrm{Det}_{Q_1} \otimes \mathrm{Det}_{Q_2} \to \mathrm{Det}(Q_1 \circ_i Q_2) \ . \tag{3.8}$$

Mit diesem kann man nun Verknüpfungen auf $\widetilde{K}$ definieren. Sei $Q_1 \in K(m)$ und $Q_2 \in K(n)$, $\widetilde{Q}_i \in \mathrm{Det}_{Q_i}$, $i = 1, 2$, so ist definiert

$$\widetilde{Q}_1 \circ_i \widetilde{Q}_2 := \ell^i_{Q_1,Q_2}(\widetilde{Q}_1 \otimes \widetilde{Q}_2) \in \mathrm{Det}(Q_1 \circ_i Q_2) \subset \widetilde{K}(m+n-1) \ ,$$

falls $Q_1 \circ_i Q_2$ definiert ist. Dies ergibt eine partielle Verknüpfung. Ist $\sigma \in S_n$, dann ist Det_Q kanonisch isomorph zu $\mathrm{Det}_{\sigma(Q)}$. D.h. die S_n Aktion liftet zu einer Aktion auf $\widetilde{K}$. Das Einselement $\widetilde{I} \in \widetilde{K}(1)$ ist fixiert durch die Bedingung

$$\ell^1_{I,I}(\widetilde{I} \otimes \widetilde{I}) = \widetilde{I}\ .$$

Wiederum sind alle Verknüpfungen stetig, bzw. komplex-analytisch und wir erhalten eine stetige und komplex-analytische partielle Operade.

Gemäß Segal gibt es für das Determinantenbündel auf dem Modulraum der Riemannschen Flächen mit orientierten, analytisch parametrisierten Rändern einen kanonischen Zusammenhang. Dieser induziert einen Zusammenhang für das Bündel $\widetilde{K}(n)$. Huang zeigt, daß $\widetilde{K}(n)$ sogar ein triviales Bündel ist. Ist $c \in \mathbb{C}$ vorgeben, dann ist es möglich die c-te Potenz zu definieren. Als Geradenbündel über $K(n)$ sind alle Potenzen kanonisch isomorph. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die kanonischen Isomorphismen entsprechend (3.8) verschieden sind. Sie können durch $(\ell^i_{Q_1,Q_2})^c$ beschrieben werden. Auch hier erhalten wir eine partielle Operade $\widetilde{K}^c$.

Im nächsten Schritt geht es darum einen kanonischen Schnitt $\psi = \{\psi_n\} : K \to \widetilde{K}^c$ zu finden. Ist $\widetilde{I} \in \widetilde{K}^c(1)$, so erhält man durch Paralleltransport mit Hilfe des kanonischen Zusammenhangs einen Schnitt $\psi_1 : K(1) \to \widetilde{K}^c(1)$. Sei $J \in K(0)$ der Punkt ∞ und Standardkoordinate $w = \frac{1}{z}$ und $\widetilde{J}$ ein geeigneter Lift, so definiert auch hier der Paralleltransport einen Schnitt ψ_0. Sei $Q_1 \in K(2)$ das oben angegebene Element (3.5) und sei $\widetilde{Q}_1$ das eindeutig bestimmte Element in $\widetilde{K}(2)$ mit

$$\ell^1_{Q_1,J}(\widetilde{Q}_1 \otimes \widetilde{J}) = \widetilde{I},$$

so ergibt sich wie oben durch Paralleltransport der Schnitt ψ_2. Da aber K mit Hilfe der Vernähungsoperationen durch $K(0), K(1)$ und $K(2)$ erzeugt wird, ist somit ψ insgesamt festgelegt.

IV. Die geometrischen Vertexalgebren

Wir wissen was ein K-Raum, bzw. ein $\widetilde{K}^c$-Raum ist. Es handelt sich um eine Darstellung durch die lineare Operade End_V mit einem geeigneten Vektorraum V. Dieses Konzept müssen wir noch etwas erweitern. Sei $V = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} V_{(k)}$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum mit $\dim V_{(k)} < \infty$. Es sei $\overline{V} := \prod_{k\in\mathbb{Z}} V_{(k)}$. Sei $\langle .,. \rangle$ die Paarung zwischen dem Dualraum V' und $\overline{V}$ und $\pi_k : \overline{V} \to V_{(k)}$ die k-te Projektion. Desweiteren setzen wir

$$H_V(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, \overline{V}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \qquad H_V = \{H_V(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \ .$$

Für $f \in H_V(n)$ und $g \in H_V(m)$ betrachten wir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle v', f\big(v_1, \dots, v_{i-1}, \pi_k(g(v_i, \dots, v_{i+m-1})), v_{i+m}, \dots, v_{m+n-1}\big)\rangle \ .$$

Konvergiert diese Reihe für alle $v' \in V'$ und für alle $v_1, \dots, v_{n+m-1} \in V$, so sei die Verknüpfung $f \circ_i g$ definiert über den Wert dieser Reihe. Wir haben wiederum die S_n-Aktion und ein Einselement $I = id_V \in H_V(V, \overline{V})$. Da die Verknüpfung nicht überall definiert ist, erhalten wir nur eine partielle Operade H_V. Offensichtlich ist End_V eine Unteroperade von H_V.

Eine *geometrische Vertexalgebra* (auch *vertex associative algebra* genannt) ist ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum mit einem Homomorphismus der partiellen Operade $\widetilde{K}^c$ nach der partiellen Operade H_V mit einigen zusätzlichen Bedingungen. Genauer

Definition. Eine *geometrische Vertexalgebra vom Rang c (oder mit zentraler Ladung c)* ist ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum V und eine Abbildung

$$\Phi : \widetilde{K}^c \to H_V \quad \text{mit} \quad \Phi(\widetilde{K}^c(n)) \subseteq H_V(n) \ ,$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) (Axiom der positiven Energie) $\dim V_{(k)} < \infty$ und $V_{(k)} = 0$ für $k \ll 0$.

(2) (Graduierungsaxiom) Sei $P_a = (0, (a, 0)) \in K(1)$ (d.h. der $\mathbb{P}^1$ mit den Punkten ∞ und 0 und den Koordinaten $w = \frac{1}{z}$ und az), dann gelte für $v' \in V'$ und $v \in V_{(k)}$

$$\langle v', \Phi(\psi_1(P_a))(v)\rangle = a^{-k}\langle v', v\rangle \ .$$

(3) (Permutationsaxiom)

$$\Phi(\sigma(\widetilde{Q})) = \sigma(\Phi(\widetilde{Q})) \ .$$

(4) (Vernähungsaxiom) Für die $\widetilde{Q}_1 \in \widetilde{K}^c(n)$ und $\widetilde{Q}_2 \in \widetilde{K}^c(m)$, für welche $Q_1 \circ_i Q_2$ existiert, existiert auch $\Phi(\widetilde{Q}_1) \circ_i \Phi(\widetilde{Q}_2)$ und es gilt

$$\Phi(\widetilde{Q}_1 \circ_i \widetilde{Q}_2) = \Phi(\widetilde{Q}_1) \circ_i \Phi(\widetilde{Q}_2) \ .$$

(5) (Analytizitätsaxiom) Sei

$$\nu_n = \Phi \circ \psi_n : K(n) \to H_V(n),$$

dann kann man für $v' \in V'$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$

$$\langle v', \nu_n(.)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\rangle$$

immer als Funktion auf $K(n)$ auffassen. In Bezug auf die Darstellung (3.2) sei sie meromorph in $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ mit höchstens Polen bei $z_i = 0$ und $z_i = z_j, i \neq j$. Desweiteren sei sie ein Laurentpolynom in den Skalierungsfaktoren $a_1^{(i)}, i = 1, \ldots, n$ und ein Polynom in den Komponenten der Vektorfelder $A^{(i)}, i = 0, \ldots, n$, welche die Reparametrisierung bewirken. Zusätzlich gebe es für festgehaltenes $(i,j), i \neq j$ und v_i, v_j eine obere Schranke für die Ordnung des Pols $(z_i - z_j)$ der Funktion

$$\langle v', \nu_n(.)(v_1 \otimes \cdots v_i \otimes \cdots v_j \otimes \cdots v_n)\rangle \ ,$$

welche unabhängig von v_k, $k \neq i, j$ ist. $\square$

Satz. [Hu3] *Die Kategorie der geometrischen Vertexalgebren vom Rang c ist isomorph zur Kategorie der konformen Vertexalgebren vom Rang c im engeren Sinne.*

Wir haben bisher allgemeine Vertexalgebren betrachtet. Allerdings habe ich konforme Vertexalgebren bereits in meinem Einführungsvortrag definiert. Es sei hier daran erinnert.

Sei $(V, |0\rangle, T, Y)$ eine Vertexalgebra. Ein gerader Vektor ω heißt *konformer Vektor mit zentraler Ladung c*, falls für die Komponenten seines Felds

$$Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

gilt

(1) $L_{-1} = T$,
(2) L_0 ist diagonalisierbar,
(3) die L_n definieren eine Darstellung der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c \in \mathbb{C}$.

Eine *konforme Vertexalgebra* (V,ω) *vom Rang* c ist eine Vertexalgebra V mit einem konformen Vektor ω mit zentraler Ladung c.

Vertexalgebren zu einem Gitter (siehe [Schl, Teil II], bzw. [Dei]) bilden eine konforme Vertexalgebra. Der konforme Vektor wird in [Schl, S.7] angegeben. Eine konforme Vertexalgebra im engeren Sinne bedeutet, daß durch L_0 eine $\mathbb{Z}$-Graduierung auf V gegeben ist,

$$V = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} V_{(k)} \quad \text{mit} \quad \dim V_{(k)} < \infty \quad \text{und} \quad V_{(k)} = 0,\ k \ll 0$$

gilt und daß für $v \in V_{(k)}$ gilt $L_0 v = kv$. Vertexalgebren zu einem positiv definiten geraden Gitter erfüllen diese Bedingungen.

Der Beweis des Satzes wird in dem Buch [Hu3] erscheinen, das mir noch nicht vorliegt. Ich kann lediglich ein Beispiel für die Korrespondenz angeben. Sei $(V,|0\rangle,Y,\omega)$ eine konforme Vertexalgebra vom Rang c im engeren Sinne. Ihr muß eine geometrische Vertexalgebra zugeordnet werden, d.h. eine Abbildung von $\widetilde{K}^c$ nach H_V, welche die obigen Bedingungen erfüllt. Als Vektorraum V nimmt man den Zustandraum V der Vertexalgebra. Die Elemente von $K(2)$ können gegeben werden als

$$Q = (z_1, A^{(0)}, (a_1^{(1)}, A^{(1)}), (a_1^{(2)}, A^{(2)})) \in M^1 \times H \times (\mathbb{C}^* \times H) \times (\mathbb{C}^* \times H) = K(2)\ .$$

Sei ψ_2 der Schnitt $K(2) \to \widetilde{K}^c(2)$. Die Objekte über Q werden durch $\lambda\psi_2(Q)$ gegeben. Sei zuerst die Dreipunktsituation mit den Standardkoordinaten betrachtet, also

$$Q_{z_1} = (z_1, 0, (1,0), (1,0)),$$

dann ist das Element aus $H_V(2)$ gegeben durch

$$\Phi(\lambda\psi_2(Q_{z_1}))(v_1,v_2) = \lambda \cdot Y(v_1,x)\, v_2\big|_{x\,=\,z_1}\ .$$

Für allgemeine Koordinatensysteme wird gesetzt

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\psi_2(Q))(v_1,v_2) = \lambda \cdot \exp\big(-\sum_{i>0} A_i^{(0)} L_{-i}\big)\cdot \\ Y\big(\exp(-\sum_{i>0} A_i^{(1)} L_i)(a_1^{(1)})^{-L_0}\, v_1, x\big) \cdot \exp\big(-\sum_{i>0} A_i^{(2)} L_i\big)(a_1^{(2)})^{-L_0}\, v_2\big|_{x\,=\,z_1}\ .\end{aligned}$$

Beim Vergleich mit (3.4) ist zu beachten, daß L_i ein Lift des Vektorfeldes $z^{i+1}\frac{d}{dz}$ ist. Die Ausdrücke unter der Exponentialfunktion entsprechen also den jeweiligen Operatoren, die angewendet werden um das angebenene Koordinatensystem zu erzeugen.

V. Zusätze

1. Haben wir eine Operade topologischer Räume $\{O(n)\}$, so bilden die Komplexe der singulären Ketten ebenfalls eine Operade $C_\bullet(O)$. Führt man dies für die Operade P aus, erhält man $C_\bullet(P)$. Eine *topologische konforme Feldtheorie (vom Tree-Level und $c = 0$)* ist eine $C_\bullet(P)$-algebra (V, Q). Hierbei ist (V, Q) ein Komplex von Vektorräumen mit Differential Q. Er heist BRST-Komplex, Q heißt BRST-Operator und $H_\bullet(V)$ BRST-Kohomologie [Kim].

2. Wollen wir die gesamte Situation auf höheres Geschlecht verallgemeinern, so müssen wir kompliziertere Verknüpfungen erlauben. Ist $P_g(m, n)$ der Modulraum Riemannscher Flächen mit $m+n$ geordneten holomorph eingebetteter Einheitskreisscheiben. Diese seien aufgeteilt in die ersten m negativ orientierten (Eintrittsstellen) und die letzten n positiv orientieren (Austrittsstellen). Man hat die Vernähungsabbildungen

$$\begin{gathered} P_g(m,n) \times P_{g'}(m',n') \to P_{g+g'}(m+m'-1, n+n'-1) \ , \\ (\Sigma, \Sigma') \mapsto \Sigma \circ_{(i,j)} \Sigma', \quad 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m' \ . \end{gathered}$$

Hierbei wird die i-te Austrittsstelle von Σ mit der j-ten Eintrittsstelle von Σ' vernäht. Daneben gibt es noch die Vernähungsoperation

$$P_g(m,n) \to P_{g+1}(m-1, n-1), \qquad \Sigma \mapsto \tau_{(i,j)}\Sigma$$

bei der von Σ die i-te Austrittsstelle mit der j-ten Eintrittsstelle vernäht wird. Eine teilweise Erweiterung der in diesem Vortrag vorgestellten Theorie kann auch in diesem Rahmen gegeben werden. Hierbei wird z.B. End_V durch $\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m})$ ersetzt [Kim].

Literaturhinweise

[BeDr] Beilinson, A., Drinfeld, V., *Chiral algebras I*, preprint.

[Dei] Deitmar, A., *Struktur von Vertexalgebren*, Vortrag in der AG MA-HD 1997.

[Hu1] Huang, Yi-Zhi, *Introduction to vertex operator algebras, III*, q-alg/9504019.

[Hu2] Huang, Yi-Zhi, *Intertwining operator algebras, genus-zero modular functors and genus-zero conformal field theories*, q-alg/9512024.

[Hu3] Huang, Yi-Zhi, *Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras*, Birkäuser, 1997 (to appear).

[HuLe1] Huang, Yi-Zhi, Lepowsky, James, *Vertex operator algebras and operads*, hep-th/9301009.

[HuLe2] Huang, Yi-Zhi, Lepowsky, James, *Operadic formulation of the notion of vertex operator algebra*, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups. AMS-IMS-SIAM summer research conference, June 13-19, 1992, Mount Holyoke College, South Hadley, MA, USA (Sally, Paul J. jun. et al Contemp. Math. Vol 175, eds.), 1994, pp. 131–148.

[HuLe3] Huang, Yi-Zhi, Lepowsky, James, *On the $\mathcal{D}$-module and formal-variable approaches to vertex algebras*, Topics in Geometry: In Memory of Joseph D'Atri,Progress in Nonlinear Differential Equations, Vol. 20, Birkhauser, Boston, 1996. 175 (S. Gindikin, eds.), Birkhauser, 1996, pp. 175 –202.

[Kac] Kac, V., *Vertex algebras for beginners*, University Lecture Series, Vol. 10, AMS, 1997.

[Kim] Kimura, Takashi, *Operads of moduli spaces and algebraic structures in Conformal Field Theory*, Moonshine, the Monster, and related topics. Joint summer research conference on moonshine, the Monster, and related topics, June 18-23, 1994, Mount Holyoke College, South Hadley, MA, USA Contemp. Math. Vol 193 (Dong, Chongying et al., eds.), 1996, pp. 159–189.

[Schl] Schlichenmaier, M., *Vertexalgebren – eine Einführung*, Vortrag in der AG MA-HD 1997.

[Seg] Segal, G., *The definition of conformal field theory*, preprint 1988, (hiervon gibt es verschiedene mehr oder weniger(meistens) vollständige Versionen).